Задание 2 “Геометрия”

Дедлайн 17 ноября 2020 9:00

Ссылка на контест: <https://contest.yandex.ru/contest/20642/problems/>

Ведомость: <https://docs.google.com/spreadsheets/d/1VGub5KESAx-_zgjoTmjGrhZ1_JrreAX9Z1oVlQdfTmY/edit?usp=sharing>

## Задача A. Отрезки. (4 балла)

**A\_1.**

Арсений уснул. И приснилась ему планета Ка-Пэкс, на которой протекают две реки. Эти реки достаточно необычны для землян: они текут строго от одной точки до другой точки напрямую в пространстве (так как в сне Арсения планета вовсе не круглая). Арсений решил, что он хочет прорыть тоннель между реками. Так как он ленивый, то и копать много он не хочет. Помогите Арсению найти, сколько-таки ему придется прорыть.

Формат ввода.

В четырех строках задаются целые координаты начала и конца рек. Координаты по модулю не превосходят *1000*.

Формат вывода.

Выведите искомую величину c точностью не менее *6* знаков после десятичной точки.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 0 0 0  1 1 1  0 0 1  0 1 0 | 0.40824829 |

**A\_2.**

В своем сне Арсений добился многих успехов в строительстве. Теперь ему вручили в руки карту и сказали построить трассу от точки A до точки B. Арсений бы и рад помочь, но есть небольшая проблема --- реки, которые опять же протекают строго напрямую от одной до другой точки, так как чтобы провести трассу через них, придется строить мосты. Помогите Арсению посчитать, сколько мостов ему придется построить.

Формат ввода.

В первой строке вводятся координаты точек A и B — начала и конца трассы. Во второй строке вводится количество рек N. В следующих N строках записаны координаты начала и конца реки. Все координаты целые и лежат от 0 до 10^5 , рек не более 30000.

Формат вывода.

Выведите количество рек, которые пересекаются с трассой.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 6 3 1 1  4  5 2 8 2  3 4 3 1  7 1 6 4  3 3 0 3 | 1 |

## Задача B. Выпуклая оболочка 2D. (4 балла)

**B\_1**. (используйте алгоритм Грэхема)

Арсений продолжает спать. Теперь ему снится кроличья ферма на планете Ка-Пэкс. Правда, ферма у него так себе --- одни кроличьи норы в пустом поле. Чтобы её хоть как-то облагородить, Арсений решил поставить забор так, чтобы все норки оказались внутри огражденной территории, а досок он потратил как можно меньше. Помогите Арсению найти длину забора, чтобы он мог уже заказывать стройматериалы!

Формат ввода.

В первой строке вводится число N (3 ≤ N ≤ 10^5). Следующие N строк содержат пары целых чисел x и y (-10^9 ≤ x, y ≤ 10^9) --- координаты кроличьих нор.

Будьте аккуратны! Точки произвольны. Бывают совпадающие, бывают лежащие на одной прямой в большом количестве.

Формат вывода.

Одно вещественное число --- длину забора --- с максимально возможной точностью.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 5  0 0  2 0  0 2  1 1  2 2 | 8 |

**B\_2**. (используйте алгоритм Эндрю)

Задача абсолютно такая же и сдавать нужно в ту же задачу в контест.

## Задача C. Выпуклая оболочка 3D. (7 баллов)

**C\_1.**

Арсений решил поиграть в настольную игру со своим другом Ильей. Так как играть обычными кубиками им уже стало неинтересно, Илья попросил по его чертежам сконструировать новую игральную кость. Так как он ленивый, то просто накидал точек в пространстве и сказал, что все они должны лежать в кубике его мечты. У Арсения есть 3D-принтер, вот только материалы для печати достаточно дорогие, поэтому он хочет выполнить требования своего друга, потратив как можно меньше пластика.

P.S. Никакие 4 точки не лежат в одной полуплоскости. Реализуйте мечту Ильи за O(n2) (или быстрее :)). Кубик внутри должен быть заполнен.

Формат ввода.

Первая строка содержит число m --- количество тестов. В последующих строках описаны сами тесты. Каждый тест начинается со строки, содержащей n (n ≤ 1000) --- число точек. Далее, в n строках даны по три числа --- координаты точек. Все координаты целые, не превосходят по модулю 500.

Формат вывода.

Для каждого теста выведите следующее. В первую строку выведите количество граней m. Далее в последующие m строк выведите описание граней: количество точек грани (= 3) и номера точек в исходном множестве. Точки нумеруются в том же порядке, в котором они даны во входном файле.  
Точки в пределах грани должны быть отсортированы в порядке против часовой стрелки относительно внешней нормали к грани. Первая точка – точка с минимальным номером.

Порядок граней лексикографический.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 1  4  0 0 0  1 0 0  0 1 0  0 0 1 | 4  3 0 1 3  3 0 2 1  3 0 3 2  3 1 2 3 |

**C\_2.**

Арсений и Илья затеяли странную игру. Сначала Илья придумывает, какие бы точки он хотел видеть внутри воображаемого яблока. А затем он спрашивает Арсения, что если бы червячок находился в некоторой точке внутри такого минимально возможного яблока, то сколько бы ему пришлось бы скушать мякоти, чтобы выбраться на поверхность.

Формат ввода.

На первой строке число $N$ ($4 \le N \le 1,000$). Далее $N$ строк содержат координаты точек для яблока. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости.

Далее число запросов $q$ ($1 \le Q \le 10^5$) и $Q$ строк, содержащих точки-запросы. Все точки запросы гарантированно внутри минимально возможного воображаемого яблока. Все координаты целые, по модулю не более $10\,000$.

Формат вывода.

Для каждого запроса выведите число с четырьмя знаками после запятой -- расстояния до поверхности минимально возможного воображаемого яблока.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 6  0 0 0  100 0 0  0 100 0  0 0 100  20 20 20  30 20 10  4  1 1 1  30 30 35  7 8 9  90 2 2 | 1.0000000000  2.8867513459  7.0000000000  2.0000000000 |

## Задача D. Сумма Минковского (5 баллов)

**D\_1.**

Арсений опять уснул. И снова на планете Ка-Пэкс без него никак --- два фермера поссорились из-за того, что их территории могут перекрываться. Естественно, как самого рассудительного, Арсения позвали урегулировать конфликт. Для начала он решил узнать, насколько серьезен конфликт. Для этого он решил узнать, пересекаются ли фермы вообще. Помогите Арсению это понять, если известно, что каждая ферма представляет собой выпуклый многоугольник.

Формат ввода.

Первая строка содержит число N точек первого многоугольника. Затем идут N строк с координатами точек первого многоугольника по часовой стрелке (координаты – действительные числа).  
Второй прямоугольник задается аналогично.

N, M ≤ 80000.

Формат вывода.

Выведите “YES”, если фермы пересекаются, и “NO”, если нет (без кавычек).

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 5  0 0  0 1  1 2  2 1  1 0  3  3 0  2 0  1 1 | YES |

**D\_2.**

Арсений настолько потерялся в своих снах, что попал на передел земельных участков на планете Ка-Пэкс. Тут Арсений предложил делить по-научному. Во-первых, устроить аукцион, на котором будут распределяться существующие участки, по два на каждого делегата. А после чего определить новые участки так.

Пусть A и B — два участка. Для любых положительных u и v (цен, заявленных за каждый из участков на аукционе) рассмотрим фигуру u\*A + v\*B, образованную точками uP + vQ , где P пробегает все точки из A, а Q — из B. Несложно видеть, что построенная так фигура будет снова выпуклой и ограниченной, зависит от выбора начала системы координат, и более того, при переносе начала координат в другую точку этот участок также подвергается параллельному переносу на некоторый вектор, и потому его площадь S(u; v) корректно определена. Так как никто из жителей планеты Ка-Пэкс ничего толком не понял, то решение возражений не вызвало. Аукцион прошел быстро. Только с подсчетом итоговой площади вышли проблемы. Арсений помнил, что функция S(u; v) всегда является однородным квадратным многочленом: S(u; v) = Xu^2+2Yuv + Zv^2 для всех u; v > 0, причем коэффициент X всегда равен площади S(A), а Z — площади B. А вот коэффициент Y—– так называемую смешанную площадь S(A; B) выпуклых фигур A и B — Арсений подсчитать не мог. А вы сможете?

Формат ввода.

Вход состоит из описаний двух выпуклых многоугольников — A и B. Описание

каждого из них начинается со строки, содержащей число вершин N (2 < N ≤ 10^5). Затем следуют N строк, каждая содержит координаты очередной вершины (x\_i ; y\_i), разделенные пробелами. Вершины задаются в порядке обхода против часовой стрелки, начиная с любой из них; все координаты целые и не превосходят по модулю 10^8. Последовательные три вершины не могут лежать на одной прямой.

Формат вывода.

Единственная строка выходного файла должна содержать искомую смешанную площадь без лидирующих нулей с шестью цифрами после десятичной точки.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 4  0 0  1 0  1 1  0 1  4  0 1  -1 0  0 -1  1 0 | 2.0 |

## Задача E. ScanLine. (4 баллов)

Арсений открыл эзотерический салон в свои снах на планете Ка-Пэкс. У Арсения всё будет хорошо. А вот у его клиентов – не факт. Если хотя бы какие-нибудь их палочки в гадании “Мокусо Дзэй” пересеклись, то день точно сложится удачно. А если нет – то стоит ждать беды. Чтобы точнее сказать, что конкретно пойдет хорошо в этот день, нужно знать, какие именно палочки пересекаются. Помогите Арсению узнать, как пройдет день у его клиентов.

Формат ввода.

Палочка представляется как отрезок прямой. В первой строке входного файла записано число N (1 ≤ N ≤ 125000) – количество палочек в гадании. Следующие N строк содержат описания палочек: (i + 1)-я строка содержит координаты концов i-й палочки – целые числа x\_1, y\_1, x\_2, y\_2 (-10000 ≤ x\_1, y\_1, x\_2, y\_2 ≤ 10000).

Формат вывода.

В первой строке выходного файла выведите слово “YES”, если день сложится удачно. Вторая строка должна содержать числа i и j --- номера палочек, которые пересекаются (i < j).

Если день пройдет плохо, выведите в единственной строке выходного файла “NO”.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 2  0 0 2 2  0 2 2 0 | YES  1 2 |
| 2  0 0 3 2  0 -1 3 -2 | NO |

## 

## Задача F. Диаграмма Вороного. (6 баллов)

Даны точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Никакие 4 точки не лежат на одной окружности. Кроме того, все точки имеют различные x-координаты. Определите среднее число сторон в многоугольниках диаграммы Вороного этого множества точек. Считаются только конечные многоугольники. Если все многоугольники неограниченны, ответ полагается равным 0. Число точек n ≤ 100000. Алгоритм должен иметь асимптотику O(n log n).

Формат ввода.

В каждой строке через пробел записаны действительные координаты точек xi yi.

Формат вывода.

Число - среднее число сторон в ограниченных многоугольниках диаграммы Вороного. 0, если таких многоугольников нет.

|  |  |
| --- | --- |
| stdin | stdout |
| 0 0  3 -3  4 1  2 -1 | 3 |